

# Métodos numéricos con Python

DIEGO ARÉVALO OVALLE, MIGUÉL ÁNGEL BERNAL YERMANOS, JAIME ANDRÉS POSADA RESTREPO

# Métodos numéricos con Python



# Métodos numéricos con Python

Diego Arévalo Ovalle

Miguel Ángel Bernal Yermanos

Jaime Andrés Posada Restrepo



Bogotá, octubre de 2021



© Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano

Métodos numéricos con Python.

ISBN: 978-958-5142-97-8

E-ISBN: 978-958-5142-98-5

DIGITAL ISBN: 978-958-5142-99-2

Editorial Politécnico Grancolombiano

PBX: 7455555 Ext. 1171

editorial@poligran.edu.co

Octubre de 2021

Bogotá, Colombia

Institución Universitaria Politécnico  
Grancolombiano

#### **Autores**

Diego Arévalo Ovalle

Miguel Ángel Bernal Yermanos

Jaime Andrés Posada Restrepo

#### **Director editorial**

Eduardo Norman Acevedo

#### **Analista de producción editorial**

Carlos Eduardo Daza Orozco

#### **Corrección de estilo**

Hernán Darío Cadena

#### **Armada electrónica**

Jaime Andrés Posada Restrepo

#### **Impresión y encuadernación**

Xpress Estudio Gráfico y Digital

Impreso y hecho en Colombia

Printed in Colombia

¿Cómo citar este título?

Arévalo Ovalle, D., Bernal Yermanos, M. A., & Posada Restrepo, J. A. (2021), Métodos numéricos con Python, Bogotá: Editorial Politécnico Grancolombiano.

La Editorial del Politécnico Grancolombiano pertenece a la Asociación de Editoriales Universitarias de Colombia, ASEUC.

El contenido de esta publicación se puede citar o reproducir con propósitos académicos siempre y cuando se dé cuenta de la fuente o procedencia. Las opiniones expresadas son responsabilidad exclusiva del autor.

Arévalo Ovalle, Diego

Métodos numéricos con Python. / Diego Arévalo Ovalle, Miguel Ángel Bernal Yermanos y Jaime Andrés Posada Restrepo; director editorial, Eduardo Norman Acevedo. – Bogotá D.C.: Editorial Politécnico Grancolombiano, 2021.

158 p.: il.; 17 × 24 cm.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN: 978-958-5142-97-8

1. INGENIERÍA – ANÁLISIS NUMÉRICO. – 2. MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS – 3. PYTHON (LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN DE COMPUTADORES). – 4. INTERPOLACIÓN (MATEMÁTICAS). – 5. ECUACIONES DIFERENCIALES. – 6. ALGORITMOS. – 7. ANÁLISIS MATEMÁTICO

511 A678m 21 Ed.

Sistema Nacional de Bibliotecas – SISNAB  
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano



# Prefacio

Este texto es el resultado de nuestra labor como orientadores del curso de métodos numéricos en la *Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano* durante varios años. Aunque inicialmente solamente se disponía de notas de clase construidas de manera informal para los cursos, con el tiempo surgió la necesidad de consolidarlas en un sólo documento.

El libro contiene métodos computacionales para resolver problemas esenciales en el campo de ingeniería o matemática aplicada. En cada método se pretende dar al lector una visión de su esencia, necesidad, ventajas y desventajas. En algunos casos, alejándose de presentaciones rigurosas, pero sin dejar de ser correctas. El objetivo final es proporcionar los elementos necesarios para la aplicación adecuada de los algoritmos.

Adicionalmente, se tiene material sobre medidas de error, orden de convergencia, notación  $O$  y un capítulo dedicado a diferenciación e integración numérica. Se presenta la extrapolación de Richardson y esquemas de integración numérica entre los que se tienen trapecios y Simpson, entre otros.

Por otro lado, al momento de escribir una versión preliminar del texto, se utilizó `Python 2` para la implementación de los algoritmos. Dado el retiro de dicho lenguaje el primero de enero de 2020, los algoritmos del texto se han migrado completamente de `Python 2` a `Python 3`.

También se han corregido errores tipográficos, de notación, y la exposición de algunos temas se ha modificado para transmitir más efectivamente sus contenidos.

Los requisitos para acceder al material no se han alterado. Solamente se asume familiaridad del lector con temas de cálculo y álgebra lineal, entre los cuales se encuentran: teorema del valor intermedio, teorema del valor medio, teorema de Taylor, teorema fundamental del cálculo, eliminación gaussiana y regla de Cramer, entre otros.

Por último, agradecemos nuevamente a los estudiantes y compañeros que nos han brindado apoyo ya sea con peticiones, observaciones, quejas, reclamos o halagos acerca de los contenidos y recursos del texto y su correspondiente exposición en clase.





# Índice general

<b>1. Errores y aproximaciones</b>	<b>13</b>
1.1. Introducción . . . . .	13
1.2. Cifras significativas . . . . .	14
1.3. Error de truncamiento . . . . .	16
1.4. Error de redondeo . . . . .	19
1.5. Orden de convergencia . . . . .	19
1.6. Notación $O$ . . . . .	20
<b>2. Búsqueda de raíces</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción . . . . .	23
2.2. Método de bisección . . . . .	25
2.2.1. Criterios de parada . . . . .	29
2.2.2. Método de <i>regula falsi</i> . . . . .	29
2.3. Método de Newton-Raphson . . . . .	32
2.3.1. Método de la secante . . . . .	33
2.4. Método de punto fijo . . . . .	36
2.5. Orden de convergencia en el método de punto fijo . . . . .	43
2.6. Orden del método de Newton-Raphson . . . . .	45
<b>3. Interpolación</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Ajuste exacto . . . . .	48
3.2.1. Polinomio de interpolación de Lagrange . . . . .	48

3.2.2.	Polinomio de interpolación de Newton . . . . .	52
3.2.3.	Trazadores cúbicos . . . . .	60
3.3.	Ajuste por mínimos cuadrados . . . . .	65
3.3.1.	Errores . . . . .	65
3.3.2.	Funciones de ajuste . . . . .	66
3.3.3.	Polinomios de mínimos cuadrados . . . . .	67
3.3.4.	Ajuste exponencial . . . . .	70
<b>4.</b>	<b>Diferenciación e integración numérica</b>	<b>73</b>
4.1.	Introducción . . . . .	73
4.2.	Aproximaciones a la derivada . . . . .	74
4.3.	Extrapolación de Richardson . . . . .	76
4.4.	Aproximaciones a la integral definida . . . . .	78
4.5.	Regla de los trapecios . . . . .	79
4.6.	Regla de Simpson . . . . .	81
<b>5.</b>	<b>Sistemas de ecuaciones</b>	<b>85</b>
5.1.	Introducción . . . . .	85
5.2.	Métodos directos . . . . .	85
5.2.1.	Factorización $LU$ . . . . .	89
5.3.	Métodos iterativos . . . . .	93
5.3.1.	Normas vectoriales . . . . .	94
5.3.2.	Normas matriciales . . . . .	96
5.3.3.	Solución de sistemas de ecuaciones . . . . .	98
5.3.4.	Método de Jacobi . . . . .	99
5.3.5.	Método de Gauss-Seidel . . . . .	102
5.3.6.	Convergencia métodos de Jacobi y Gauss-Seidel . . . . .	106
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales</b>	<b>111</b>
6.1.	Introducción . . . . .	111
6.2.	Problemas de valor inicial . . . . .	112
6.2.1.	Método de Euler . . . . .	113

6.2.2.	Orden del método de Euler . . . . .	116
6.2.3.	Método de Verlet . . . . .	118
6.2.4.	Error del método de Verlet . . . . .	119
6.2.5.	Métodos de Runge-Kutta orden dos . . . . .	121
6.2.6.	Método de Runge-Kutta orden cuatro (RK4) . . . . .	127
<b>A.</b>	<b>Tutorial de Python</b>	<b>131</b>
A.1.	Generalidades . . . . .	131
A.2.	Funciones . . . . .	131
A.3.	Estructuras básicas de control . . . . .	132
A.3.1.	if . . . . .	132
A.3.2.	while . . . . .	132
A.3.3.	for . . . . .	132
A.4.	Ejemplos . . . . .	133
A.4.1.	Factorial . . . . .	133
A.4.2.	GCD . . . . .	133
A.4.3.	¿Es palíndromo? . . . . .	134
A.4.4.	NumPy . . . . .	134
<b>B.</b>	<b>Compendio de programas</b>	<b>137</b>
B.1.	Búsqueda de raíces . . . . .	137
B.1.1.	Bisección . . . . .	137
B.1.2.	<i>Regula falsi</i> . . . . .	140
B.1.3.	Newton . . . . .	143
B.1.4.	Secante . . . . .	146
B.1.5.	Punto fijo . . . . .	148
B.2.	Interpolación . . . . .	151
B.2.1.	Lagrange . . . . .	151
B.2.2.	Diferencias divididas de Newton . . . . .	152
B.2.3.	Trazadores cúbicos . . . . .	154
B.2.4.	Recta de ajuste mínimos cuadrados . . . . .	157

B.3. Diferenciación e integración numérica . . . . .	159
B.3.1. Extrapolación de Richardson . . . . .	159
B.3.2. Regla del trapecio . . . . .	160
B.3.3. Regla de Simpson . . . . .	162
B.4. Sistemas de ecuaciones . . . . .	164
B.4.1. $LU$ . . . . .	164
B.4.2. Jacobi . . . . .	166
B.4.3. Gauss-Seidel . . . . .	170
B.5. Ecuaciones diferenciales . . . . .	173
B.5.1. Euler . . . . .	173
B.5.2. Verlet . . . . .	175
B.5.3. RK4 . . . . .	178
<b>Bibliografía</b>	<b>181</b>





Ulevelen (de enige echte!!!)